



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE GRADO

Título
El juego y las matemáticas en Educación Primaria
Autor/es
Blanca Montoya Galán
Director/es
Luz Roncal Gómez
Facultad
Facultad de Letras y de la Educación
Titulación
Grado en Educación Primaria
Departamento
Curso Académico
2013-2014



El juego y las matemáticas en Educación Primaria, trabajo fin de grado de Blanca Montoya Galán, dirigido por Luz Roncal Gómez (publicado por la Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

© El autor
© Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2014
publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Grado.

El juego y las matemáticas en Educación Primaria

Autor:

Blanca Montoya Galán.

Tutor: *Luz Roncal Gómez*

Fdo.

Titulación:

Grado en Educación Primaria.

Facultad de Letras y de la Educación.



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Año académico: 2013-2014.

Resumen: Partiendo del desarrollo de competencias en educación se observa la necesidad de incluir nuevos métodos de enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria, como los juegos. Inicialmente, se consideran las razones culturales, matemáticas y educativas para incluir los juegos en el aula. A continuación, se delimita la definición de la palabra “juego”, cuáles son los tipos de juegos más adecuados y las fases de aplicación de los mismos. Posteriormente, se describe la incorporación progresiva de los juegos a través de tres desarrollos de pensamiento. El primero en un contexto numérico, el segundo en un contexto geométrico y el tercero en un contexto funcional y espacial. Para finalizar, se plantea el método de evaluación de los juegos expuestos en el aula y las consideraciones finales a tener en cuenta.

Abstract: Starting from the development of competences in education, it is observed the need to include new teaching methods of mathematics in Primary School, such as games. Initially, the cultural, mathematical, and educational reasons to include the games in the classroom are considered. Later, we give the definition of the word “game”, we explain which are the most appropriate types of games, and the stages of application. Subsequently, we describe the progressive incorporation of games through three trends of thinking. The first one, in a numerical context, the second one, in a geometrical context, and the third one, in a functional and spatial context. To conclude, we pose the method of evaluation of the games presented in the classroom and we show final considerations to be taken into account.

Índice

1. Introducción. Contextualización del trabajo	5
2. Objetivos de la utilización de juegos relevantes para el trabajo	9
3. El juego y las matemáticas.....	11
3.1 Relación cultural de las matemáticas y el juego como actividad humana	11
3.2 Matemáticas y juegos en la enseñanza de las matemáticas	12
3.3 Definición de juegos para el uso en las matemáticas	13
3.4 Tipos de juegos.....	14
3.5 Utilización de los juegos	15
4. Selección y desarrollo progresivo de juegos concretos en el aula.....	17
4.1 Desarrollo del pensamiento en un contexto numérico	19
4.1.1 Llegar a cien	19
4.1.2 NIM simplificado- quitando fichas	20
4.1.3 La cadena.....	22
4.1.4 Coger sin perder- NIM	23
4.2 Desarrollo del pensamiento en un contexto geométrico	26
4.2.1 Puntos y líneas.....	26
4.2.2 Senderos- El Bridg-it.....	29
4.2.3 Intersecciones- Puntos de corte	32
4.2.4 El SIM	34
4.3 Desarrollo del pensamiento en un contexto funcional y espacial	36
4.3.1 Juego de las eles	36
4.3.2 Juego con los pentominós.....	39
4.3.3 Cubo SOMA.....	42
5. Evaluación	45
5.1 Evaluación del juego en sí mismo	45
5.2 Evaluación del alumnado	46
5.3 Evaluación del profesor.....	47
5.4 Ejemplo de tabla de evaluación	48
6. A modo de reflexión	51
7. Referencias.....	53

“El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas.
Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y
contemplando su juego y su ciencia,
¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y la belleza?”

Miguel de Guzmán (1984).

1. Introducción. Contextualización del trabajo.

Durante los últimos años, se introdujo en la enseñanza en general y en las matemáticas en particular, el desarrollo de las competencias. Este aspecto hace necesario concentrarse en incluir una forma de enseñar matemáticas que vaya más allá de la aplicación de los procedimientos para responder a ejercicios estándar (Niss, 2003).

La competencia matemática está descrita por el Proyecto Pisa de la OCDE como, “Capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que las Matemáticas juegan en el mundo, realizar razonamientos bien fundados y utilizar e involucrarse en las matemáticas de manera que satisfagan las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (p. 74).

La consecución de dicha competencia nos lleva necesariamente a formar individuos capaces de resolver los problemas y retos de su vida privada o profesional. Por eso, la educación que se les imparta desde las escuelas debe seguir una metodología flexible que permita el pensamiento crítico, desde el trabajo con tareas abiertas a diferentes interpretaciones y soluciones. Utilizando estrategias flexibles y desarrollando habilidades de resolución de problemas para hacer frente a la ingente cantidad de información que llega a través de medios cada vez más variados (OCDE, 2006), se trata de “Aprender a valorar la Matemática, sentirse seguros en su capacidad de hacer Matemáticas, llegar a resolver problemas matemáticos, aprender a comunicarse mediante las Matemáticas y aprender a razonar matemáticamente” (Chamoso, Durán, García, Martín y Rodríguez, 2004, p. 47).

Desde este punto de vista las matemáticas son una forma de pensamiento y ese es nuestro objetivo principal a la hora de trabajar con nuestros alumnos, llegando a la

cuestión que nos atañe, el modo de educarlas. Y este será a través del juego, de juegos matemáticos que nos permitan el razonamiento, la adquisición paulatina de conceptos.

Según Bishop (1998), “El juego tiene una estrecha relación con el razonamiento matemático y podemos considerar como válida que es la base del razonamiento hipotético. Desarrolla habilidades concretas del pensamiento estratégico, adivinación y planificación” (p.17). Por tanto, “Ya no pensamos en los juegos sólo como un entretenimiento o una diversión, como algo útil para motivar pero poca cosa más. Actualmente, como resultado de las investigaciones en distintos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, somos mucho más conscientes del potencial educacional de los juegos” (p. 10).

Como señalaba Miguel de Guzmán (1984), “Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para las matemáticas, disfrutan con puzzles y juegos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Existen en ellas claros bloqueos psicológicos que nublan su mente en cuanto se percatan de que una cuestión que se les propone, mucho más sencilla que tal vez el juego que practican, tiene que ver con el teorema de Pitágoras” (p. 11).

Podemos observar que son varias las razones culturales, matemáticas, educacionales y psicológicas para incluir los juegos y el juego en la educación matemática de los niños hoy en día, las cuales iremos desglosando a lo largo del estudio como forma de modificación de la metodología del aula. Se pretende empezar con los juegos, desarrollar en ellos los procedimientos y estrategias, para hacer después la traslación a las matemáticas. Teniendo presente a Claudi Alsina (1991), “Enseñar y aprender Matemáticas puede y debe ser una experiencia feliz. Curiosamente casi nunca se cita a la felicidad dentro de los objetivos educativos pero es bastante evidente que sólo podremos hablar de una labor docente bien hecha cuando todos alcancemos un grado de felicidad satisfactorio.”(p.43).

Así, se propone en el presente trabajo la inclusión paulatina pero real de juegos en el aula de matemáticas. Partiendo del principio de que enseñar y aprender matemáticas supone una experiencia feliz, que desarrolla el pensamiento y nos lleva al trabajo de las competencias necesarias para la vida.

Para comprender la inclusión de juegos en el aula, se define y clarifica el concepto de “juego”, se analizan las características que debe tener un juego para trabajarlo en educación primaria y se delimita la clasificación de juegos en dos tipos, los

de conocimiento y los de estrategia. Además se propone el trabajo de las fases de aplicación que ellos generan.

Una vez descrito el marco teórico que sustenta el trabajo se muestran tres desarrollos progresivos de pensamiento:

- El primero de ellos basado en un contexto numérico, con juegos como “llegar a cien”, “el NIM simplificado”, “la cadena” y “coger sin perder”.
- El segundo corresponde a un contexto geométrico, y en él podemos ejecutar juegos como “puntos y líneas”, “el Bridg-it”, “intersecciones” y “el SIM”.
- El tercero en un contexto funcional y espacial, que comprende “el juego de las eses”, “el juego de los pentominós”, y “el cubo SOMA”.

Posteriormente, se plantea el método de evaluación de los juegos expuestos en el aula en relación con los objetivos planteados en el trabajo. Y para ello, se observará el papel del juego en sí mismo, el del alumnado y el del profesor, con los respectivos ítems a tener en cuenta para que el juego produzca conocimiento y reflexión.

2. Objetivos de la utilización de juegos relevantes para el trabajo.

Los objetivos que se pueden cubrir con la utilización de juegos en el aula son diversos y comprenden desde aquellos que afectan directamente a la comprensión de los conceptos matemáticos hasta aquellos que incluyen a la persona y su visión hacia las matemáticas. Así se pretende:

- Desarrollar contenidos matemáticos generales a través del juego.
- Aplicar contenidos matemáticos a situaciones de la vida cotidiana de los alumnos.
- Disfrutar del aspecto lúdico de las matemáticas.
- Experimentar procesos de exploración, planteamiento de hipótesis, conjeturas.
- Generar estrategias ganadoras para el juego a través del pensamiento lógico-deductivo y saber explicarlas.
- Comprender con exactitud las reglas de los juegos para su posterior puesta en práctica.
- Flexibilizar las estrategias de resolución de los juegos, ser capaz de invertir los procesos de resolución.
- Aplicar los conocimientos matemáticos ya adquiridos para la resolución de los juegos.
- Generar nuevos conocimientos matemáticos a través del juego, siendo capaz de representarlos con algoritmos matemáticos.
- Trabajar en equipo mediante la participación activa y el respeto al compañero.
- Gestionar las actitudes que genera ganar o perder en un juego.
- Buscar soluciones a través del esfuerzo y el interés para el propio aprendizaje.
- Motivar futuras investigaciones matemáticas.
- Comprender las relaciones entre los diferentes contenidos y su progresividad con los aumentos de dificultad y complejidad.
- Observar los propios límites reforzando aquellos contenidos que aun no se han comprendido en su plenitud.
- Adquirir la seguridad y confianza para el afrontamiento de las matemáticas como elemento esencial para el día a día.

“La matemática es en gran parte juego, y el juego puede en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumento matemáticos.

Existen diferencias sustanciales entre la práctica del juego y la de la matemática, (...). Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y , para algunos, aún apasionante”
Miguel De Guzmán, (1984).

3. El juego y las matemáticas.

3.1 Relación cultural de las matemáticas y el juego como actividad humana.

En las fases primitivas de las culturas, las cuales se desarrollaban en un ambiente similar al juego, observamos que las respuestas sociales a sus necesidades han hecho que los juegos constituyesen modelizaciones de situaciones reales. Y esta constante se puede observar a través de las matemáticas como uno de los pilares básicos de la cultura humana, por ser una actividad polifacética, que sustenta el conocimiento matemático en las diferentes culturas a través de las 6 actividades importantes que, según Bishop (1998), realizan todos los grupos culturales: - Contar; - Localizar; - Medir; - Dibujar; - Jugar; - Explicar.

Desde los pitagóricos hasta nuestros días son innumerables los avances matemáticos, siendo las grandes teorías su sustento, y podemos extraer de ellas una relación lúdica, ya sea en sus orígenes o en su evolución. Miguel de Guzmán (1989) afirmaba “Son muchos los casos en que una pregunta interesante realizada en un plano lúdico o bien una observación ingeniosa sobre una situación aparentemente inocente han dado lugar a nuevos modelos de pensar en matemáticas” (p.62).

Y es que la matemática es paradigma y modelo de actividad científica, es instrumento para la exploración, es lógica, razonamiento, deducción, resolución... y en su esencia más profunda también juego, pero “¿Dónde termina el juego y dónde empieza la matemática seria?” (De Guzmán, 1984, p.3).

3.2 Matemáticas y juegos en la enseñanza de las matemáticas.

Desde una perspectiva científica de las matemáticas podemos afirmar que, “El investigador matemático experimentado suele comenzar su aproximación a la cuestión que le atrae en clave de juego, abierto a la sorpresa, al misterio que espera desvelar, con el esfuerzo placentero del descubrimiento” (De Guzmán, 1989, p.64). Y es ese descubrimiento el que debemos transmitir a nuestros alumnos, a partir del estímulo de la propia acción que el juego matemático atañe, debemos ayudarle a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas y sociales por el propio interés que produce, sin pensar en otro fin a alcanzar en un primer momento, que el propio juego.

Esto permite desplegar con mayor libertad su imaginación, sus estrategias de resolución lógico deductivas, teniendo en cuenta las reglas aceptadas por los jugadores, sin pensar en estructuras conceptuales que pueda marcarse en teorías tradicionales, ya que “Hay juegos que, de forma natural, resultan asequibles a una manipulación muy semejante a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de los problemas matemáticos y que encierran lecciones profundamente valiosas” (De Guzmán, 1984, p.11).

Todos estos aspectos nos llevan a afirmar que los juegos son un recurso didáctico más y como docentes debemos conocerlos. Debemos reflexionar sobre la selección de los juegos, los elementos que contienen y van a aportar, los intereses que nos proponemos, los objetivos que queremos lograr y sobre todo la edad a la que van destinados. Ya que, los juegos deben ser lo bastante asequibles como para contribuir a clarificar el conocimiento y lo bastante difíciles como para potenciar el pensamiento lógico, el desafío del alumno, su interés y sus posibilidades.

“Para ganar en un juego es necesario recurrir a habilidades matemáticas. Hay que observar jugadas, contar, deducir, generalizar resultados, planificar futuras jugadas, investigar posibles nuevos métodos o estrategias” (D’Andrea, p.1). “Pero sobre todo, el espíritu lúdico de acercamiento a los problemas más serios es el aspecto que más puede beneficiar al estudiante, impregnando positivamente toda su personalidad científica para el futuro” (De Guzmán, 1989, p.64).

3.3 Definición de juegos para el uso en las matemáticas.

El diccionario de la Real Academia Española (2001) define juego como ejercicio recreativo sometido a reglas, y en el cual se gana o se pierde.

Socialmente, el término “juego” según Chamoso et al. (2004), se utiliza para referirse a multitud de actividades cotidianas con las que muchas personas se entretienen y ocupan su tiempo libre, ya sea practicándolas directamente o presenciando cómo lo hacen otros.

Las actividades que estarían dentro de lo que se llama jugar son las que “Huizinga llama “el círculo mágico del juego”, el pensamiento hipotético, la adivinación, el cálculo aproximado, la demostración, la verificación,” (Bishop, 1998, p.28).

Según Gairín (1990), que aporta algunas características nuevas a la definición de Johann Huizinga, observamos que:

- Es una ocupación voluntaria, a la que dedicarse libremente.
- Es un desafío contra una tarea (solitario) o un oponente.
- Vienen controlado por un conjunto definido de reglas, que abarcan todas las maneras de jugarlo.
- Representa una situación arbitraria claramente delimitada en el tiempo y en el espacio, desde la actividad de la vida real.
- Socialmente las situaciones de los juegos se consideran de importancia mínima.
- El estado exacto que se alcanza en el juego no se conoce a priori al comenzar el mismo.
- Termina después de un número finito de movimientos en el espacio-tiempo.

En definitiva cuando los juegos se incorporan al aula, si se pretende que no se desvirtúen, hay que cuidar las características que los definen (Chamoso, Durán, García, Martín y Rodríguez, 2004, p. 49):

- Lúdica e improductiva: En el momento de su presentación, mientras los alumnos se familiarizan con ellos, tienen que considerarlos un divertimento y utilizarlos exclusivamente para jugar. La utilidad didáctica que hizo que el profesor los eligiese surgirá en el desarrollo posterior si se trabajan de forma adecuada.
- Libre: Si no se consigue despertar en los estudiantes el deseo de juego, éste perderá su sentido y se convertirá en un simple ejercicio rutinario.

- Con reglas propias, limitados espacial y temporalmente: Las sesiones de clase están limitadas temporalmente por lo que, si queremos sacar provecho de un juego, conviene que éste sea de pocas reglas y de fácil comprensión. Muchas normas y confusas no invitan a jugar y pueden suponer un bloqueo inicial. Además sería deseable que el desarrollo de sus partidas fuera rápido pues, si duran mucho, harán que el alumno se aburra.
- De resultado incierto: Si son muy previsible los estudiantes se cansarán enseguida.

3.4 Tipos de juegos.

La clasificación de juegos en la literatura es tan diversa como las perspectivas desde las que se quiera abordar. Algunos autores optan por una clasificación basada en materiales a utilizar, otros por los tópicos matemáticos, otros por los tipos de juegos e incluso por las zonas geográficas o históricas de producción.

En este caso, para clasificar los juegos se va a considerar el trabajo de Corbalán (1994), en el que propone la división de dos grandes grupos: juegos de conocimiento y juegos de estrategia.

Se denominan juegos de conocimiento aquellos que utilizan, en su desarrollo, uno o varios de los tópicos habituales existentes en los currículos de Matemáticas y su utilización persigue desarrollar una enseñanza más activa, creativa y participativa. Por tanto su objetivo es alcanzar, afianzar o repasar determinados conceptos o procedimientos matemáticos de un modo más atractivo.

Se entienden por juegos de estrategia aquellos que, para conseguir su objetivo (lograr una determinada posición, dejar al contrincante sin fichas, ser el último en coger un objeto de un montón...), en cada momento el jugador debe elegir una de las diversas posibilidades existentes. El conjunto y la combinación de estas elecciones o tácticas es la estrategia que el jugador emplea para ganar o no perder. Son un buen recurso para introducir a los estudiantes las destrezas específicas para la resolución de problemas y en los hábitos típicos del pensamiento matemático. Tienen la gran ventaja de que, al requerir escasos o nulos conocimientos matemáticos previos, permite centrar la atención en las habilidades que se quieren desarrollar. Así como descubrir que no todos los juegos tienen estrategia ganadora, que también es importante.

Considerando la amplitud de la clasificación podemos insertar los juegos seleccionados dentro de cada uno de los cuatro bloques de contenidos matemáticos de Educación Primaria y cubrir las necesidades curriculares desde los mismos.

3.5 Utilización de los juegos.

Respecto a la utilización de juegos podemos incidir en dos aspectos, que combinados, proporcionan la mejor experiencia ante el juego y que aportan los datos claves para la evaluación de los mismos y del alumnado.

En primer lugar encontramos el momento de aplicación del juego en el proceso de enseñanza aprendizaje, reflexión necesaria en cada una de las actividades del profesor de educación primaria. Pero en lo que a juegos se refiere tomaremos el nombre dado por Corbalán (1994) a cada una de las fases del proceso:

1. Juegos pre-instruccionales. Son aquellos que se utilizan previamente a la adquisición de conceptos o procedimientos o para la adquisición de procedimientos típicos del quehacer matemático.

2. Juegos co-instruccionales. Se utilizan a la vez que se van enseñando conceptos o procedimientos, para que se refuercen mutuamente los conceptos y la comprensión de juegos.

3. Juegos post-instruccionales. Se utilizan para reforzar conocimientos o procedimientos ya conocidos desde hace tiempo y/o actualizarlos.

En segundo lugar observamos las fases de aplicación en sí misma del juego, según Miguel de Guzmán (1984) a través de cuatro momentos:

1. Antes de hacer tratare de entender.
2. Tramaré una estrategia.
3. Miraré si mi estrategia me lleva al final.
4. Sacaré jugo al juego.

Estas fases corresponden con las aplicadas para la resolución de problemas de Polya (1945), que describe una primera etapa de comprensión, otra de exploración y planificación, una tercera de ejecución y una última de revisión.

La estructura de los momentos de aplicación mencionadas anteriormente serán el sustento de cada uno de los juegos aquí presentes. Tomando en consideración que “Un juego cualquiera comienza con la introducción de unas cuantas reglas, algunos objetos iniciales, cuya función queda definida por dichas reglas, exactamente del mismo modo que los objetos de una teoría matemática quedan determinados por definición implícita. Esta semejanza de estructura permite comenzar a ejercitar en estos los mismos procesos de pensamiento que son útiles en el desarrollo de las matemáticas. Las habilidades heurísticas en matemáticas pueden iniciarse con enorme fruto en la práctica y exploración de juegos muy diversos” (De Guzmán, 1989, p. 64).

“Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones “prácticas”, sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de la experiencia vivida por ellos.

Y si el “juego” se elige y prepara con cuidado, puede llevar casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia”.

Martin Gardner, (1983).

4. Selección y desarrollo progresivo de juegos concretos en el aula.

Partiendo de la configuración del currículo actual de educación primaria en esta comunidad, los alumnos desarrollarán la curiosidad intelectual, la responsabilidad, la autonomía personal y la confianza en sus posibilidades. Y para ello se les debe plantear una variedad de situaciones, con una información que les permita enriquecer las posibilidades de utilización de los conceptos matemáticos.

En esta etapa se atenderá a la configuración cíclica de los contenidos, entendiendo que están siempre relacionados y se construyen unos sobre otros. Sobre todo haciéndose preguntas, obteniendo modelos e identificando relaciones y estructuras, alcanzando una eficaz alfabetización numérica junto con el desarrollo de procesos de resolución de problemas. De modo que puedan obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas y que les permiten analizar fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad de su día a día.

En general, una comprensión que les permita entender la información que reciben y las preguntas que se les plantean, un conocimiento suficiente de los sistemas de medida, un lenguaje geométrico mínimo para referirse con propiedad al mundo que les rodea y los conocimientos estadísticos imprescindibles para entender la información que les llega.

Así, la selección de juegos se realiza partiendo de las bases teóricas anteriores, con el objetivo de cubrir las necesidades curriculares del último curso de educación primaria. Hay que hacer notar que la próxima ley educativa plantea un primer bloque genérico “procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, que sería la columna vertebral de los cuatro bloques ya existentes, además de las horas dedicadas al

razonamiento matemático y a la lectura comprensiva de forma transversal. Estos datos los podemos observar en el Decreto 24/2014, de 13 de junio, propuesto por la Comunidad Autónoma de La Rioja como borrador de implantación de la Ley Orgánica de Mejora de Calidad Educativa. De este modo, el planteamiento de nuestro proyecto hace que los juegos se puedan insertar en el aula, independientemente de la legislación, ya que cubre los objetivos y contenidos de ambas.

Para ello se van a exponer o mostrar tres posibles desarrollos progresivos de los muchos que se podrían ejecutar y así realizar una incorporación efectiva del juego en el aula de matemáticas. Estas progresiones se han denominado: desarrollo del pensamiento en un contexto numérico, desarrollo del pensamiento en un contexto geométrico y desarrollo del pensamiento en un contexto funcional y espacial.

Esto requiere de la planificación para un efectivo desarrollo y una posterior evaluación tanto del alumnado como del resultado del juego y la organización del profesor.

Por tanto entenderemos estos tres desarrollos como juegos de estrategia por el momento de aplicación, pero se pueden observar en ellos tópicos matemáticos y conducen a teorías posteriores donde se podrían ejecutar como juegos de conocimiento.

Todos ellos se describen e incorporan con reglas definidas, con el desarrollo del pensamiento hipotético, trabajando el cálculo mental, la demostración de los conceptos en un trato libre en un espacio y tiempo determinado.

Los materiales son diversos y necesitan de la grafía matemática, pero se pueden ejecutar con materiales manipulativos en los momentos de aplicación. Además para fomentar la motivación ante el juego sería interesante que ellos mismos los pudiesen construir para su desarrollo. Así también se tendrían en cuenta los beneficios que puede aportar la manipulación de materiales para la comprensión de los conceptos y llegar de una manera más rápida a la estrategia final.

Por último debemos hablar de la edad a la que están destinados los juegos. Se configuraron pensando en sexto curso de educación primaria, como cierre de etapa académica, en la que los alumnos deben adquirir estrategias básicas en el ámbito de las matemáticas. Además se tiene en cuenta la reflexión y desarrollo del pensamiento hipotético-deductivo como elementos necesarios para afrontar la etapa educativa posterior, en la que claramente se utilizarán y profundizarán los contenidos académicos implícitos en los juegos. Así fomentamos la investigación desde una visión general de la materia, inculcando el gusto de descubrirla a través del juego.

4.1 Desarrollo del pensamiento en un contexto numérico.

4.1.1 Llegar a cien.

Objetivos:

- Ejercitar el cálculo mental.
- Practicar estrategias de resolución de problemas.
- Tomar contacto con el juego, el material.
- Plantear las primeras preguntas sobre la estrategia, el lugar de comienzo.

Material:

- Se necesitan 100 fichas y un tablero con casillas numeradas de 1 al 100, ver figura 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1. Tablero del juego llegar a 100.

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, cada vez comienza uno.
- Cada jugador en su turno colocará fichas o tachará casillas, con un mínimo de 1 y un máximo de 10 (ambas inclusive). Empezando por la casilla 1 en adelante. El número de casillas que quiere tachar el segundo se suma al del primero y los números sucesivos se van añadiendo a la suma anterior. Por ejemplo, en un comienzo de partida el primer jugador quiere poner 8 fichas, entonces cubrirá de la casilla 1 a la 8. El segundo jugador piensa poner 5, entonces cubrirá desde la siguiente casilla libre de la última que cubrió el otro jugador en adelante, en este caso de la 9 a la 13 y así sucesivamente.
- Gana el primero que llegue a 100.

Desarrollo:

- Se les presenta el material y se les explican las reglas y la importancia de cumplirlas. A partir de aquí se dejará que ellos experimenten con las partidas, que puedan plantearse cuestiones y el por qué de la importancia de comenzar cada vez uno. Pero no se pretende que lleguen a la estrategia ganadora, ya que con el siguiente juego se podrá observar de manera clara. En éste juego se pretende que practiquen el cálculo mental, la agilidad en los movimientos y la adquisición de las normas.

Estrategia ganadora:

- Para ganar hay que llegar hasta el 89, porque el siguiente que coloca ficha mínimo tiene que poner una y así el otro llegaría a cien. Y para llegar a 89 antes tenemos que llegar al 78 y así sucesivamente 67, 56, 45.... En general, en cada turno, debemos llegar hasta un número de fichas $11n + 1$. Entonces con la estrategia ganadora que se plantea gana el segundo jugador, por eso la importancia de que cada vez comience uno de los jugadores.

Posibles variantes:

- Llegar a “x” número a través de la práctica del cálculo mental. Las reglas son las mismas, sólo que ellos acuerdan el número al que quieren llegar y las operaciones se hacen a través de cálculo mental.

4.1.2 NIM simplificado- quitando fichas.**Objetivos:**

- Encontrar una estrategia ganadora para el juego.
- Deducir los números para los que sirve la estrategia ganadora.
- Razonar lógicamente los movimientos del juego, planificar.

Material:

- Se necesitan un montón de 10 fichas (u objetos iguales) que se colocarán sobre una mesa, ver figura 2.

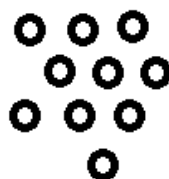


Figura 2. Fichas para el NIM simplificado.

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, que juegan alternativamente.
- Cada jugador en su turno retirará un mínimo de 1 y un máximo de 2 fichas, del montón de 10 fichas con el que partiremos.
- Pierde el jugador que se lleve la última ficha.

Desarrollo:

- Se les presenta el juego y las reglas y se deja que practiquen. Por lo general las partidas serán rápidas y podrán extraer conclusiones claras. Pero si hubiese algún problema para entenderlo se puede comenzar el juego al revés, así van viendo cuáles son las estrategias que llevan al contrario a perder.
- Con este juego es importante que reflexionen, que analicen el proceso, qué estrategias llevan a perder, qué pasaría si se aumentasen los números, etc. Tienen que fomentar el pensamiento hipotético deductivo, y las fases de resolución de problemas.

Estrategia ganadora:

- El número de fichas a retirar intervienen en la obtención de la estrategia ganadora y puede clarificar la obtención del procedimiento al alumno, para poder encontrarlo sin ningún método preciso de análisis. Siendo el segundo en coger ficha lo que hay que hacer es coger un número de fichas diferente al del otro jugador, de manera que entre los dos sumen tres. Así quedan 7, 4 y 1. Gana el segundo en coger. En este caso debemos llegar a dejar un número de fichas $3n + 1$ en cada turno.

Posibles variantes:

- Una variante general sería tener un montón de n fichas del cual cada uno de los jugadores puede coger de 1 a m fichas, siendo m un número cualquier menor que n . En este caso la estrategia general correspondiente a retirar de 1 a m fichas sería llegar a dejar un número de fichas $(m+1)n+1$ en cada turno.
- El último gana. Hay que tener en cuenta el lugar en el que se ha comenzado el juego (primero o segundo). Si el número total de fichas lo dividimos entre la suma del número mínimo de fichas (1) y máximo (m) de fichas que se pueden retirar en cada jugada obtenemos que: favorece al jugador que comienza la partida si la división no es exacta y al contrario si es exacta. Por ejemplo, si tenemos 24 fichas y podemos retirar como mínimo 1 ficha y como máximo 6, obtenemos que el primer jugador gana porque la división

no es exacta, sobrarían 3. De modo más claro, a 24 le restamos 3 y quedan 21. Si ahora le restamos la suma del número de fichas a retirar (1) y del máximo (6) la serie ganadora es $21-7=14$; $14-7=7$. Para ganar el primer jugador debe retirar 3 fichas y después llegar a los números 14 y 7.

4.1.3 La cadena.

Objetivos:

- Afianzar la estrategia ganadora adquirida anteriormente.
- Deducir las situaciones que necesariamente llevan a perder la partida.
- Efectuar acciones simétricas a las del jugador oponente.

Material:

- Se necesitan un montón de ficha (u objetos iguales) que se colocarán en un círculo cerrado en forma de cadena, una al lado de la otra, ver figura 3.

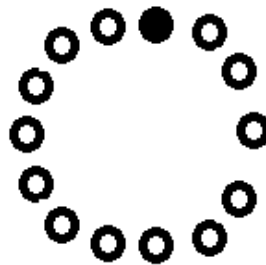


Figura 3. Ejemplo de posición del juego la cadena

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, que juegan alternativamente.
- Las reglas del juego son las mismas a las expuestas en el Nim simplificado. Sólo varía la colocación de las fichas. Con el objetivo de ver si se han comprendido las estrategias ganadoras.

Desarrollo:

- En este caso el desarrollo debe ser rápido y con mayor agilidad, ya que solo se varía la posición de las fichas. Comprobaremos la comprensión espacial de los alumnos y si se ha entendido la dinámica del juego. Es importante recordar el concepto de simetría y trabajar acciones simétricas con ellos en otros ejemplos.

Estrategia ganadora:

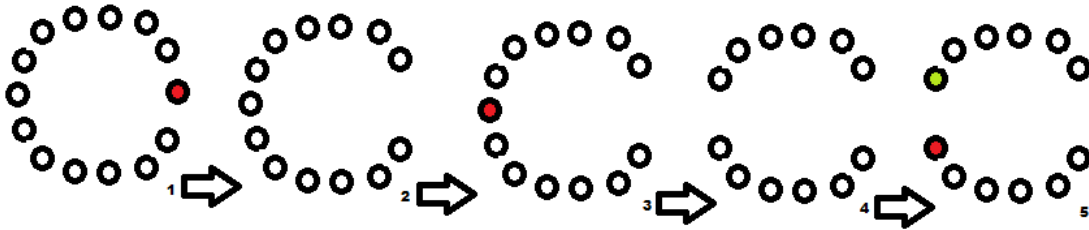


Figura 4. Ejemplo de sucesión de la estrategia ganadora del juego la cadena

- Como podemos ver en la figura 4, tenemos una cadena de 14 fichas en la que el primer jugador puede quitar una o dos fichas. En este caso como muestra el paso 1, retirará la señalada en rojo. Así deja una cadena abierta con dos extremos, como observamos en el paso 2.

Entonces el segundo jugador si conoce la estrategia ganadora debe contar el número de fichas que contiene la cadena abierta y retirar la ficha del centro si el número de la cadena abierta es impar, y si fuese par las dos fichas del centro. En este caso la cadena abierta contiene 13 fichas como muestra el paso 3, así que retirará una ficha, la señalada en rojo.

Así quedarán dos cadenas de la misma longitud, en este caso con seis fichas cada una.

A partir de aquí solo debe repetir el mismo movimiento que el otro jugador, manteniendo la simetría, teniendo en cuenta que hay que propiciar una situación en la que queden cuatro fichas, de donde la conclusión sigue inmediata, y así el segundo jugador será el vencedor. Como ejemplo, en el paso 5 de la figura 4, el primer jugador retirará la ficha roja, entonces el siguiente retirará de la otra cadena la ficha marcada en verde. No importa de qué cadena retire uno u otro las fichas siempre que estas contengan el mismo número, así sucesivamente hasta que queden cuatro fichas. El primer jugador tomará una o dos fichas, e inmediatamente el segundo jugador tomará el número contrario (dos o una).

4.1.4 Coger sin perder- NIM.

Objetivos:

- Fomentar la investigación en matemáticas
- Repetir procedimientos conocidos con mayor agilidad y destreza mental.
- Relacionar las jugadas con algoritmos matemáticos.

Material:

- Se necesitan 15 fichas (u objetos iguales) que se colocarán en tres filas horizontales. En la primera fila colocaremos 3 fichas, en la segunda fila 5 fichas y en la última fila 7 fichas, ver figura 5.

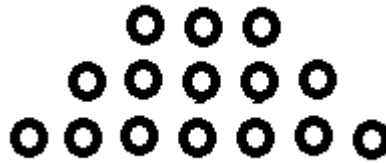


Figura 5. Posición inicial del juego coger sin perder

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, que juegan alternativamente.
- Se pueden retirar tantas fichas como se quiera con la condición de que todas pertenezcan a la misma fila horizontal.
- Pierde el jugador que se lleve la última ficha.

Desarrollo:

- Este juego es una simulación simplificada del NIM, en el que se mantiene la posición original del juego, pero no se pretende que los alumnos obtengan una estrategia ganadora por la dificultad de la misma. Con él se pretende fomentar el interés y la investigación matemática, de forma simple se trabajará con ellos las situaciones finales que nos llevan a ganar con el objetivo de que comprendan el proceso. Para ello se comenzará exponiendo a los alumnos los resultados finales para que después puedan investigar cómo llegar a ellos desde la situación inicial.

Estrategia ganadora:

- El número de fichas a retirar interviene en la obtención de la estrategia ganadora. Podemos describir dos procedimientos generales, sin entrar en la descripción del procedimiento binario que correspondería a franjas de edad superiores a las de educación primaria.
- La primera estrategia es dejar dos filas con un número de fichas iguales, ver figura 6.



Figura 6. De la posición inicial del juego hasta la primera estrategia ganadora.

Una vez igualadas dos filas, como las que podemos ver en la figura 7, lo que hay que hacer es quitar tanta fichas de la fila como las que quite el adversario de la fila contraria. Llegando a dejar una para que pierda la partida al verse obligado a coger la última ficha.

Por ejemplo si el primer jugador quita toda una fila, el segundo jugador quitará cuatro fichas de la fila dejando una.



Figura 7. Ejemplo situación final al retirar toda una fila.

Otro caso puede ser por ejemplo que quite tres fichas de una fila, ver figura 8. Entonces se realizará un ejercicio simétrico, dejando dos filas de dos. En ese caso si quitase el jugador una ficha, el otro quitaría dos dejando una, o viceversa. Y así con cualquiera de las otras situaciones que se puedan dar partiendo siempre de la posición de dos filas simétricas.



Figura 8. Ejemplo situación final al retirar alguna ficha de la fila.

- La segunda estrategia sería dejar al adversario en la primera fila con 1 ficha, en la segunda fila 2 fichas y en la última fila con 3 fichas, ver figura 9.

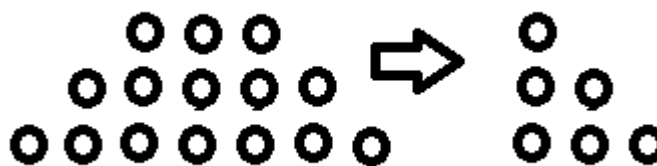


Figura 9. De la posición inicial del juego hasta la segunda estrategia ganadora.

Esta situación final de estrategia ganadora nos proporciona dos opciones. Opción a: sería dejar dos por fila como el ejemplo de la simetría anterior, ver figura 10. En este caso, como muestra el ejemplo, el primer jugador quita la ficha de la fila superior, entonces el segundo jugador iguala las filas quitando una de la fila inferior.



Figura 10. Ejemplo situación final de la estrategia ganadora en la opción a.

Opción b: sería dejar una por fila, como podemos observar en la figura 11.



Figura 11. Ejemplo situación final de la estrategia ganadora en la opción b.

4.2 Desarrollo del pensamiento en un contexto geométrico.

Durante la realización de los juegos que se van a proponer en este apartado sería interesante realizar ejercicios de simetría en el plano y trabajar los conceptos geométricos que en ellos intervienen en situaciones de la vida cotidiana del alumno, para adquirir agilidad en el uso y en la comprensión de los mismos.

4.2.1 Puntos y líneas.

Objetivos:

- Trabajar la geometría de forma lúdica.
- Observar la representación espacial
- Trazar líneas en el plano mediante la unión de puntos

Material:

- Un lápiz para cada participante y una hoja de papel liso donde se trazarán las líneas y los puntos.

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, que juegan alternativamente, cada uno con un lápiz de color diferente.
- Se trazan sobre la hoja de papel tres puntos, sin importar la posición ni la distancia entre los mismos, ver figura 12.

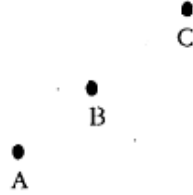


Figura 12. Ejemplo posición de los puntos al comienzo de la partida.

- Cada jugador en su turno, trazará una línea que una dos puntos o que parta de un punto y llegue al mismo, ver figura 13.

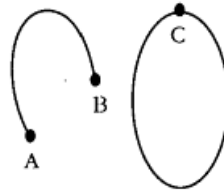


Figura 13. Ejemplo de las formas correctas de unión entre los puntos.

- Una vez trazada la línea, dibujará un nuevo punto sobre la misma, ver figura 14.

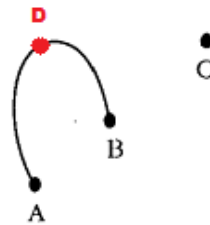


Figura 14. Situación de un nuevo punto de intersección tras la unión de dos puntos.

- Las líneas trazadas no pueden cruzarse ni cortarse a sí mismas.
- En un punto sólo pueden concurrir tres líneas, teniendo en cuenta que una línea que parta de sí misma y llegue a sí misma cuenta como dos, ver figura 15.

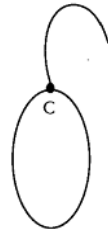


Figura 15. Ejemplo de concurrencia del máximo de líneas en un mismo punto.

- Gana el jugador que traza la última línea.

Desarrollo:

- En primer lugar se leerán en conjunto las normas del juego y se realizarán ejemplos comunes de posibles partidas, para que todos adquieran las ideas básicas que deben cumplir.
- Una vez realizada la aproximación, en parejas se dispondrán a jugar. El objetivo es que tracen bien las líneas y que en cada punto sólo concurren tres líneas, ver figura 16.
- Comentar que ha sucedido, si han llegado al final, quién ha ganado en cada partida, si han pensado por qué. Y sobre todo dar el concepto o nombre matemático a cada uno de los elementos (punto, línea, intersección). En definitiva, realizar conjeturas si así surgiese.

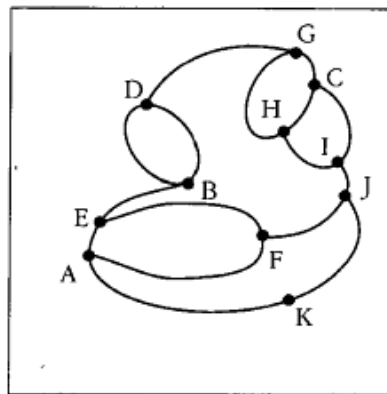


Figura16. Ejemplo de resolución de una partida. (Ferrero, 1999, p.25)

Observaciones:

- Se puede investigar el número de jugadas que se obtienen aumentando los puntos, cuántos puntos se dibujan hasta finalizar una partida con tres puntos de salida. Pero esto dependerá del grupo de alumnos y la adquisición de conceptos matemáticos, ya que no es el objetivo primero del juego.

- Primeras visualizaciones que nos llevan a futuros conceptos matemáticos y de investigación como la teoría de grafos o el problema de los puentes de Königsberg.

Posibles variantes:

- Aumentar los puntos de salida, pintar las regiones en el plano y observar que sucede.
- Los cuatro colores, ver figura 17, “¿cuál es el mínimo de colores que se necesitan para pintar un mapa geográfico cualquiera de tal forma que no haya dos países fronterizos del mismo color?”

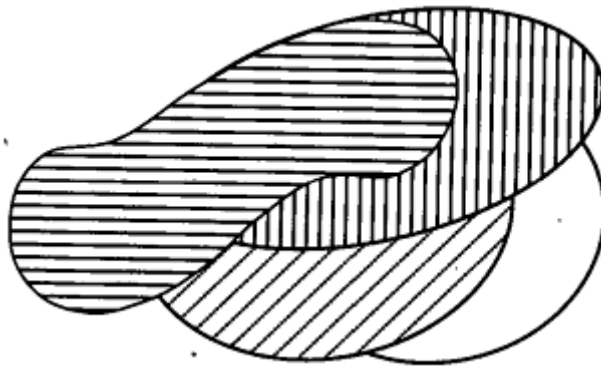


Figura 17. Los cuatro colores. (Ferrero, 1999, p.47)

4.2.2 Senderos- El Bridg-it.

Objetivos:

- Afianzar los conceptos de horizontalidad y verticalidad.
- Coordinar las relaciones derecha-izquierda, delante-detrás.
- Ejercitar la capacidad de comprensión y representación en el plano.
- Observar aspectos geométricos en el plano.

Material:

- Un lápiz de color para cada participante y una hoja con el tablero Bridg-it, con puntos de diferentes colores y los lados de unión de cada jugador, ver figura 18. El original cuenta con 180 puntos, 90 de cada color, pero dependiendo de la edad se puede adaptar el número de puntos entre un lado y otro aunque siempre deben ser los mismos para cada color y en esta misma posición.

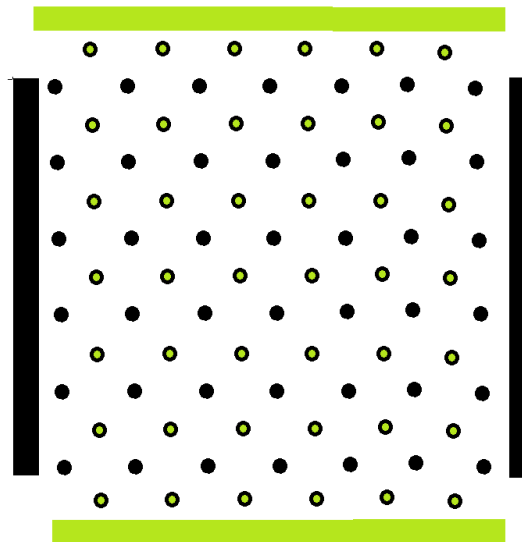


Figura 18. Tablero del juego Bridg-it adaptado.

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, que juegan alternativamente, cada uno con un lápiz de color diferente, se debe sortear quién comienza y cuál es el color de cada uno.
- En su turno cada jugador trazará una línea horizontal o vertical que una dos puntos adyacentes del mismo color.
- Los trazos no tienen por qué dibujarse de forma consecutiva, siempre que respeten la norma anterior.
- Los trazos no pueden ser diagonales y no se permite que se crucen ningún par de trazos.
- Gana el que consiga un camino mediante un trazo continuo que una los dos lados de su color.

Desarrollo:

- Cada jugador debe tener claro el objetivo de unir los dos lados del tablero de su mismo color, creando un camino continuo de un lado a otro que contiene una línea de puntos de su mismo color. Para ello deberá intentar tramar una estrategia y crear bloqueos a las posibles jugadas del contrario.
- Se les deja experimentar libremente y que observen la representación en el plano, los conceptos geométricos que intervienen en el juego, cuál es el mínimo de trazos que pueden dibujar, qué jugadas pueden llevarme a perder, lugares de comienzo. Pero sobre todo interesa la representación en el plano, posibles caminos a seguir, creación de figuras, etc.

Estrategia ganadora:

- Aunque se expone una estrategia ganadora para el que comienza la partida no se va a trabajar con los alumnos por la dificultad de la misma. Esta consiste en dibujar la primera línea de unión de puntos como se muestra en la figura 19, es decir, un extremo a de tocar la línea verde, como el de la esquina inferior izquierda. Y a partir de aquí uno se imagina la diagonal del tablero (marcada con los trazos naranjas en forma de u) y los segmentos naranjas inclinados, y responde a las jugadas del contrario con una jugada concreta: cuando la línea que hace el oponente toca uno de los extremos de los segmentos naranjas, se debe responder haciendo una jugada que toque el otro extremo del mismo segmento, como se puede ver en la figura 19 en el extremo derecho de la imagen observamos el ejemplo de colocación de la segunda y tercera línea. Haciendo esto al pie de la letra se asegura el primer jugador la victoria.

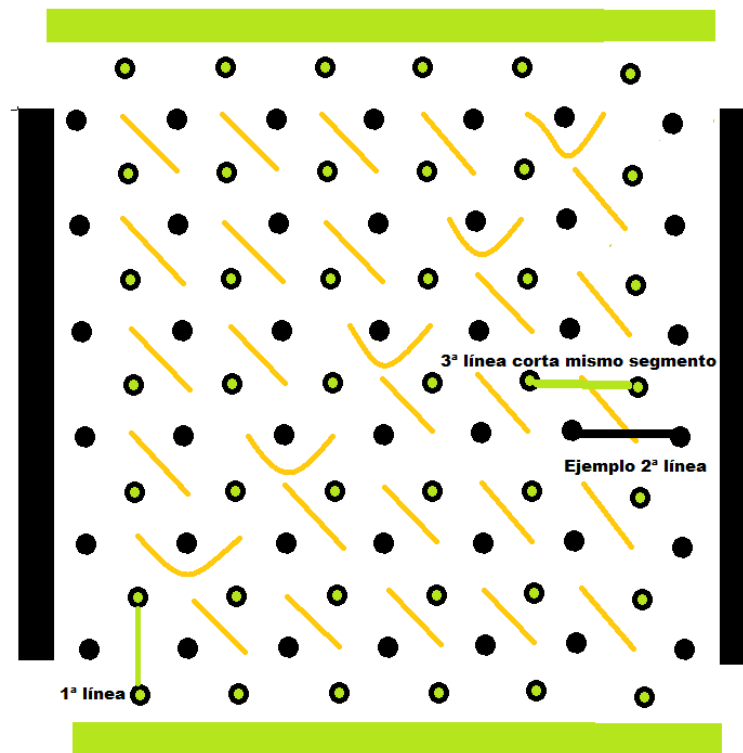


Figura 19. Estrategia ganadora del juego Bridg-it adaptado.

- Existen otros posibles movimientos de apertura conectando los puntos más próximos al centro independiente del tamaño del tablero. Seguido de las jugadas cuidadosas que se deben realizar con posterioridad que harán que gane el primer jugador.

- También se puede tratar como una prueba de la teoría de juegos en la que se demuestra que existe una estrategia para el primer jugador pero no se explica cuál es. En ella se demuestra que algo existe sin decir cómo descubrirlo, si uno de los jugadores debe ganar: suponiendo que el segundo jugador pueda ganar alguna vez nos conduce a una contradicción lógica que en consecuencia nos lleva a que sea el primer jugador el que pueda ganar siempre. Esta técnica de demostración se denomina reducción al absurdo.

Posibles variantes:

- Considerando el diseño del juego sería conveniente que en primer lugar cada jugador de manera individual practicara sobre tableros de puntos o papel cuadriculado posibles rutas a seguir. Como por ejemplo el juego de “los senderos”, (ver Ferrero, 1991, en su extensión rutas solitarias, p. 56-58).

4.2.3 Intersecciones - puntos de corte.

Objetivos:

- Recordar las características que definen las intersecciones.
- Relacionar las representaciones en el plano con conceptos matemáticos como línea recta, segmento.
- Encontrar propiedades, relaciones y regularidades.

Material:

- Un lápiz para cada participante y una hoja de papel liso donde se trazarán las líneas y los puntos. En este caso el tablero es un cuadrado con doce puntos, tres en cada lado, ver figura 20.

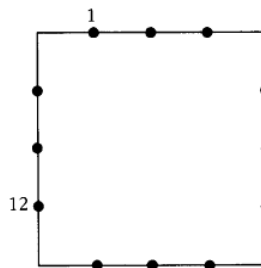


Figura 20. Tablero del juego puntos de corte. (Sánchez, et al., 1998, p.123).

Reglas del juego:

- La finalidad del juego consiste en dibujar segmentos que unan los puntos marcados en el tablero, consiguiendo el mayor número de intersecciones entre los segmentos.
- Antes de iniciar el juego se numeran con el 1 y el 12 dos puntos que no estén en el mismo lado, ver figura 20.
- El jugador que comienza une estos dos puntos del tablero con un segmento y sitúa el número 2 sobre cualquier punto del tablero que no esté sobre el lado del 1 (la numeración correlativa no puede estar en el mismo lado), ver figura 21.
- El juego sigue de forma sucesiva uniendo cada jugador un punto con el siguiente de su numeración y numerando otro correlativamente.
- Cada vez que se cruce una línea con otras ya trazadas se debe señalar el punto de corte o intersección con el color del jugador que la trazó, ver figura 21.

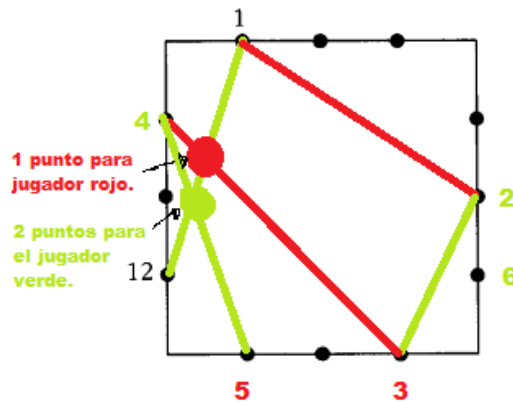


Figura 21. Ejemplo de comienzo de partida con las puntuaciones de las intersecciones.

- Se sumarán dos puntos si las intersecciones trazadas tienen el mismo color, y uno si estas son de diferente color, ver figura 21.
- No sumarán puntos intersecciones ya puntuadas con anterioridad, formadas en otras jugadas.
- Finaliza la partida al unir el punto 11 con el 12.
- Gana el juego el que obtiene mayor puntuación.

Desarrollo:

- Se insistirá en seguir la finalidad del juego cumpliendo las reglas y para facilitar la visualización de los trazos estos se realizarán con regla.
- Es interesante que los alumnos se pregunten sobre qué acontece cuando se marca un punto en un lado contiguo u opuesto, cuáles pueden ser las estrategias que más puntúan, qué conceptos matemáticos recuerdan y cuáles están trabajando, etc.

Posibles variantes:

- Aumentar el número de puntos de cada lado.
- Investigar cuál es el mínimo y el máximo de intersecciones que se pueden realizar.

4.2.4 El SIM.

Objetivos:

- Afianzar el trazo de líneas rectas
- Observar puntos de corte de las líneas rectas, vértices de las figuras geométricas planas.
- Potenciar la visión geométrica.
- Desarrollar estrategias de pensamiento matemático.

Material:

- Un lápiz para cada participante, una hoja de papel liso donde se trazarán las líneas y los puntos y una regla.
- O bien, si contamos con ello, un geoplano y gomas de colores para que la visualización y manipulación ayuden en el proceso.

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, que juegan alternativamente, cada uno con un lápiz de color diferente.
- Se trazan sobre la hoja de papel 5 o 6 puntos que marcan los vértices de un polígono, ver figura 22.

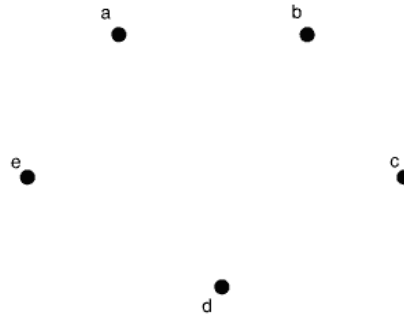


Figura 22. Tablero de cinco puntos del SIM

- Cada jugador en su turno, trazará un segmento de recta que una dos puntos cualesquiera de la figura, que no estén unidos entre sí.
- Pierde el jugador que al trazar su segmento forma un triángulo con los tres lados de su color y cuyos vértices son tres puntos cualesquiera del dibujo inicial, ver figura 23.

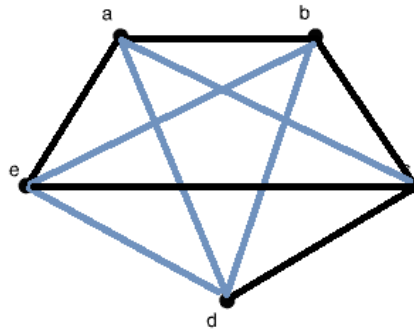


Figura 23. Desarrollo de una partida que vence el jugador con el color negro.

Desarrollo:

- Recordar los conceptos geométricos que los alumnos conocen y si estos no se hubiesen impartido adecuar la expresión para su edad e introducir después los elementos junto con la explicación teórica del tema.
- Este juego llevará a conceptos como el máximo de rectas limitadas por “n” puntos, en general $n(n-1)/2$. O el número de diagonales de un polígono de n lados.

Estrategia ganadora:

- Se presupone que hay siempre un ganador, pero en tableros de cinco o menos de cinco se puede quedar empate si la estrategia de juego no es la correcta. En todo caso se debe evitar unir segmentos en los que ya concurran

dos del mismo color para obligar al contrario a realizar el triángulo que le llevará a perder.

- En este caso en una figura con cinco puntas podemos presuponer que habrá un ganador, una vez completados los 10 segmentos posibles. Tomando un vértice del que parten cuatro segmentos, observamos que al menos tiene dos de un color. Si el jugador de ese color no forma un triángulo con ese vértice ninguno de los tres lados de ese triángulo será de ese color, por lo tanto el contrincante se verá obligado a formar el triángulo, ya que serán de su color.

Posibles variantes:

- Variar la colocación y el número de puntos en el tablero.

4.3 Desarrollo del pensamiento en un contexto funcional y espacial.

4.3.1 Juego de las eles.

Objetivos:

- Ejercitar la visualización en el plano.
- Trabajar la simetría en el espacio.
- Usar el pensamiento deductivo, la lógica y la estrategia.
- Observar las posibilidades de posición de una misma figura.
- Afianzar conceptos geométricos de las figuras planas.

Material:

- Se necesitan dos piezas en forma de “L” de distinto color, con dimensión 3 de largo y 1 de corto, (para crear estas piezas se puede disponer de multicubos encajables).
- Dos piezas redondas que serán elementos neutrales y que ocupan una casilla.
- Y un tablero de 4 x 4 casillas, ver figura 24.

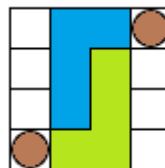


Figura 24. Material del juego las eles en su posición de inicio.

Reglas del juego:

- Intervienen dos jugadores, cada vez comienza uno y a cada uno le corresponde una “L” de un color.
- El jugador en su turno debe mover su “L” a una nueva posición. Se considera movimiento siempre que por lo menos una de las casillas cubiertas sea diferente de la que ya estaba.
- Sólo se puede mover a cuadrados no ocupados por ninguna de las otras piezas, por lo tanto se permite girar, desplazar, volver al revés, etc. la pieza.
- Una vez movida la “L”, si lo desea puede mover una de las fichas redondas neutras a cualquiera de las casillas desocupadas, nunca puede moverse una ficha neutral antes que la “L”.
- Ninguna de las piezas puede salirse de las dimensiones del tablero.
- Gana el jugador que tras realizar su movimiento consigue que su oponente no pueda mover la “L” de espacio.

Desarrollo:

- Se les presenta el material y se les explican las reglas y del juego. Es conveniente que se familiaricen con él, lo manipulen y observen posibles giros y posiciones antes de comenzar a jugar.
- Se pretende que trabajen la visualización espacial, agudicen su ingenio y descubran posibles movimientos que bloquean al oponente. Una vez descubierto es interesante que dibujen en un papel las posiciones que no permiten mover ficha y quién ganó la partida. Para ello se les entregará una cuadrícula con el tablero, para que puedan hacer sus diseños.

Estrategia ganadora:

- Es un juego aparentemente sencillo pero requiere visualización espacial, organización de movimientos de las fichas en conjunto en el plano, etc. Por tanto, se exponen algunos posibles movimientos de bloqueo a los que se espera que lleguen los alumnos, ver figura 25, y que se planteen en cuántos movimientos llegaron a ellos, si hay jugadas que permiten bloquear nada más comenzar la partida, etc.

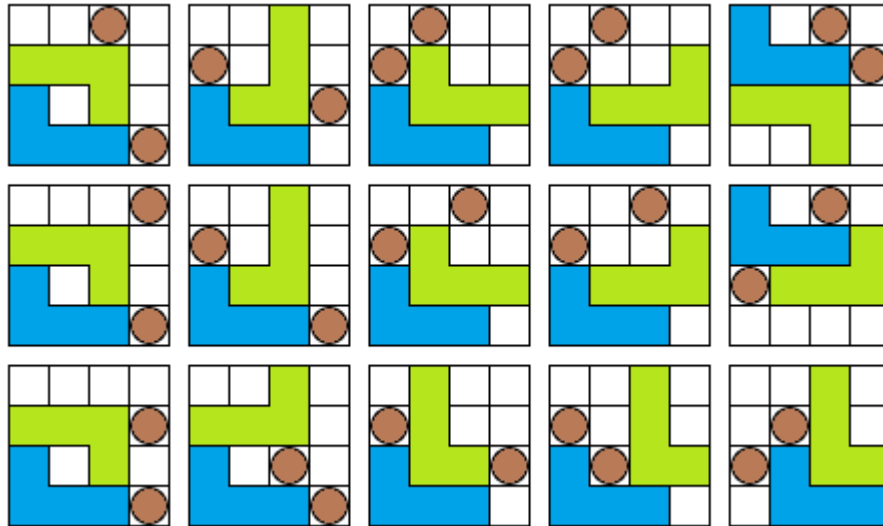


Figura 25. Posiciones finales del juego las eles.

Posibles variantes:

- El juego del Nimo. En el que se necesita un tablero de 8×8 y 16 fichas de 2×2 . O el juego de dominó cuadrado, Igual que el anterior pero con 32 fichas de 1×2 . El objetivo es el mismo bloquear al oponente cubriendo el tablero, la única condición diferente es que no se permite colocar la primera ficha en el cuadrado central.
- Este tipo de juegos nos llevan a trabajar la simetría en el espacio y a poder proponer problemas en los que intervienen la configuración de las piezas, el espacio del tablero, su dimensión. Como por ejemplo, ¿Podemos recubrir un tablero de tamaño 8×8 con 16 piezas, de las cuales una sea un cuadrado de tamaño 2×2 y las otras 15 tengan forma de L de área 4? En este juego se pretende que los alumnos lleguen a la conclusión de que con las fichas dadas no es posible recubrir el área del tablero. Ya que, para recubrir el tablero necesitamos unir todas las piezas y no es posible la unión de la ficha L y el cuadrado de 2×2 sin que quede ningún espacio libre, ver figura 26.

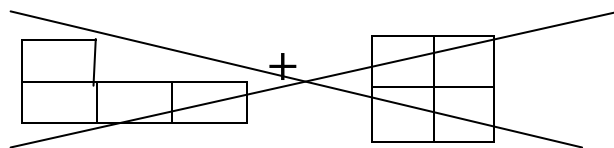


Figura 26. Imposibilidad de encajar la ficha L y el cuadrado de 2×2 .

Se deben generar rectángulos de 4×2 con un área de 8, obteniendo dos posibles combinaciones: a través de la unión de dos fichas L o de dos cuadrados de 2×2 , ver figura 27.

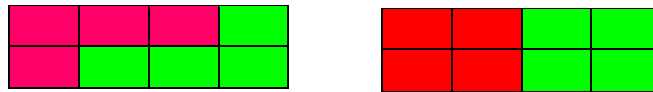


Figura 27. Opciones de unión de fichas.

Entonces para resolverlo se necesitan 16 fichas en forma de L y ningún cuadrado o 14 fichas en forma de L y 2 cuadrados de 2×2 , como podemos ver en la figura 28.

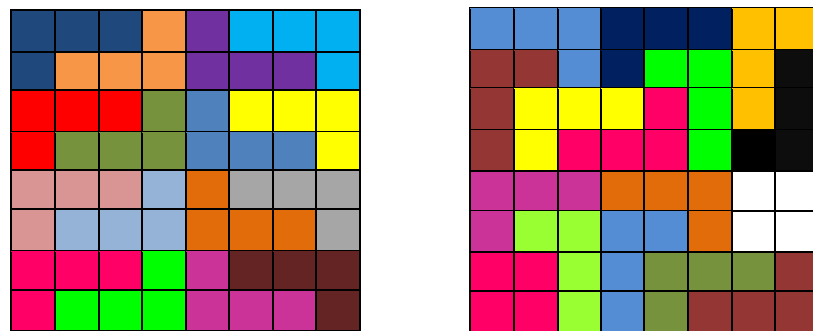


Figura 28. Opciones de resolución del problema.

4.3.2 Juego con los Pentominós.

Objetivos:

- Desarrollar el sentido geométrico.
- Combinar figuras y estructuras.
- Trabajar las características de los cuadrados.
- Observar posiciones diferentes para el mismo perímetro y/o área de manera intuitiva.
- Realizar las diferentes combinaciones de cuadrados unidos por un lado.

Material:

- Se necesitan los 12 pentominós (figuras geométricas compuestas que se obtienen con la unión de cinco cuadrados por los lados), y se pueden crear con papel, ver figura 29. Es importante que durante el trabajo con los mismos las fichas no se separen para poder manipular bien las figuras.

Además cada uno debe ser de un color diferente en la cara frontal para favorecer la visualización de las figuras, y éste se debe mantener durante todas las actividades que se realicen.

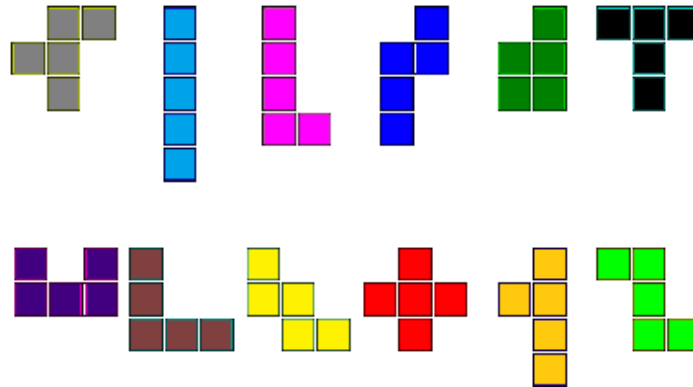


Figura 29. Los 12 pentominós.

Reglas del juego:

- Son innumerables las posibilidades en el plano y en el espacio que se puede trabajar con este material a nivel de juegos para primaria, pero se van a presentar dos opciones, una para dos jugadores y una individual.
- Opción a para dos jugadores, ver figura 30: cada jugador en su turno va colocando alternativamente un pentominó en el tablero cuadrado de mínimo 6x6 y máximo 9x9 cuadrados de lado, dependiendo de la extensión y dificultad. Para ello contarán con diferentes ejemplares de cada uno de las fichas y estas estarán situadas en un montón permitiendo que cada uno seleccione la que quiera colocar. Gana el último jugador que pueda colocar ficha y no es necesario que se coloquen todas, ya que la situación de las mismas es libre.

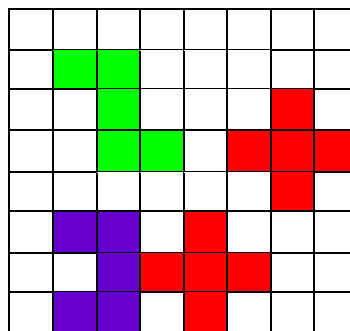


Figura 30. Ejemplo de comienzo de partida para dos jugadores.

- Opción b individual: consiste en colocar los 12 pentominós en un rectángulo de 6x10, sin dejar espacios vacíos ni superponer cuadrados.

Desarrollo:

- Antes de comenzar a jugar se trabajará con los alumnos conceptos de área, perímetro, con cuadrados de un centímetro de lado. Después se les propone a ellos el reto de hallar las figuras, para ello el profesor creará triminós, tetraminós y una figura cualquiera de los pentominós.
- Una vez obtenidas las figuras por el grupo de alumnos se les pregunta si ellas tienen alguna similitud con grafías ya conocidas. Y para que ellos recuerden cuáles son los 12 pentominós se les puede dar la estrategia de recordar las siete últimas letras del alfabeto T, U, V, W, X, Y, Z, además de la palabra FILiPiNo.
- Después se trabajará posibles situaciones de ellas en el plano, rotaciones, uniones, etc. Aunque no se explicará tal cual por la edad, es interesante tener en cuenta que: L, N, Y, P y F pueden orientarse de 8 formas: 4 por rotación y 4 más por simetría axial; Z puede orientarse de 4 formas: 2 por rotación y 2 más por simetría axial; T, V, U y W pueden orientarse de 4 formas por rotación; I puede orientarse de 2 formas por rotación; X sólo puede orientarse de una forma.
- Una vez trabajados todos estos conceptos se disponen a jugar, primero en la opción a para dos jugadores y después se les propone el reto de la opción b de manera individual.

Estrategia ganadora:

- De la opción b, se propone en la figura 31 uno de los ejemplos de cómo se pueden colocar las fichas en el tablero, (ya que en un tablero de 6x10, hay más de 2300).

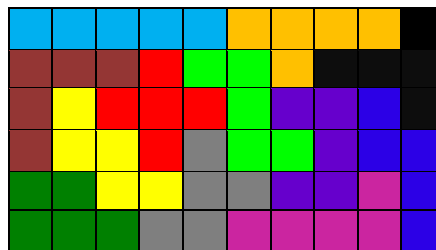


Figura 31. Ejemplo de colocación de los pentominós en un tablero de 6x10.

Posibles variantes:

- De la opción a, limitar las piezas, el espacio, trabajar la simetría en la posición de las fichas colocándolas en el plano.
- De la opción b, reducir el rectángulo a 5x12, 4x15 y como reto final a 3x20 ya que solo existen dos posibles formas de colocación.
- También se puede trabajar la creación de figuras, la representación de un pentominó concreto a escala mayor usando los otros, etc.

4.3.3 Cubo SOMA.

Objetivos:

- Desarrollar la perspectiva plano- espacial.
- Representar un cuerpo a través de una figura.
- Trabajar las vistas de la figura (frontal, perfil y plana).
- Abrir el pensamiento hacia la geometría espacial.
- Trabajar las características de los cubos.
- Construir un cubo de tres centímetros de lado.
- Observar posiciones diferentes para el mismo volumen

Material:

- Una fotocopia con los dibujos de las figuras en papel isométrico.
- Multicubos encajables.
- Con lo anterior crearán las 7 piezas del cubo que corresponden a un tricubo o triminó y a seis tetraminós o tetracubos, ver figura 32.

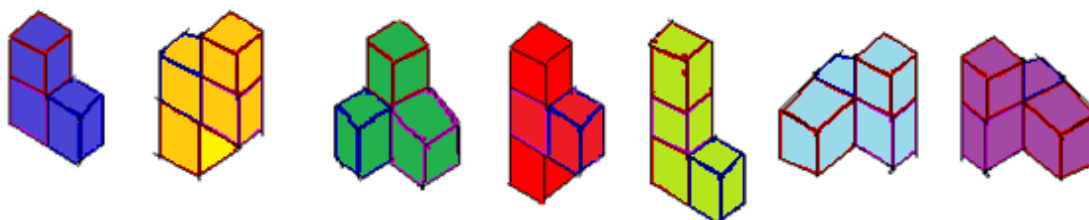


Figura 32. Piezas del cubo SOMA.

Reglas del juego:

- Es un juego solitario en el que hay que formar con las siete piezas anteriormente descritas un cubo de 3x3x3 de lado, ver figura 33.

Desarrollo:

- Es interesante trabajar la similitud de las piezas con el juego anterior, cómo se llega a la construcción de las piezas, el concepto de volumen, etc. Para ello se les proporciona a los alumnos las figuras planas en papel isométrico y se les propone crearlas con los multicubos encajables.
- Una vez trabajadas las perspectivas tras la construcción de las figuras se les explica que ellas corresponden a las piezas necesarias para formar el cubo SOMA, y que ese es su reto, intentar construirlo.
- Para ello, deben ir observando la colocación de las piezas a medida que van creando el cubo, anotando posibilidades, etc.
- Una vez formado es interesante que hagan el diseño de la forma que consiguieron e intenten nuevas posibilidades.
- Además debemos compartir cuál es la forma a la que cada uno llegó, ya que hay 260 posibilidades y sería interesante ver cuántas diferentes surgen en el aula, ver un ejemplo en la figura 33.
- Después se pueden trabajar con ellos el por qué de ese número de cubitos, cuales son las dimensiones mínimas, etc.

Estrategia ganadora:

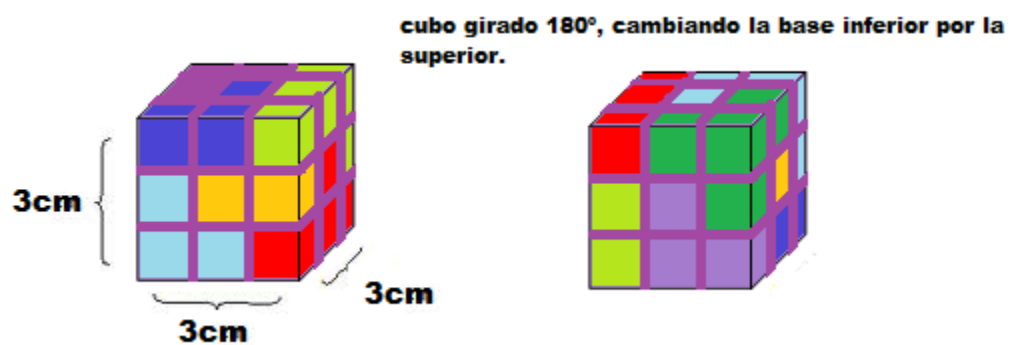


Figura 33. Ejemplo de una de las composiciones del cubo SOMA.

Posibles variantes:

- En parejas, creación de figuras con las piezas y que el compañero las tenga que imitar.
- Relacionando este juego a nivel espacial, con el anterior de los pentominós de representación en el plano, se les puede informar que el cubo de Bedlam de 4x4x4 trabaja con los 12 pentominós más un tetraminó. Pero que la dificultad de su construcción se expone como reto futuro.

5. Evaluación.

La evaluación de los juegos propuestos en el presente trabajo debe atender a tres factores, que en conjunto complementan el proceso para el mayor beneficio del juego en sí y la aportación didáctica que puedan ofrecer: se deben tener en cuenta los factores ambientales como la hora del día en la que se realizan, la disposición del aula y los factores emocionales del alumnado y el profesorado en el momento exacto de ejecución. Vamos a proponer un modelo de evaluación para el juego, el alumno y el profesor, como se observa a continuación.

5.1 Evaluación del juego en sí mismo.

En primer lugar hay que evaluar los juegos aquí expuestos en sí mismos. Para ello nos preguntamos si todos ellos cumplen las características que los definen, si se presentaron como elementos lúdicos e improductivos en su inicio, si consiguieron motivar a los alumnos a partir de la práctica libre y si la complejidad de cada uno de ellos correspondía a la edad de los destinatarios siendo el reto adecuado para fomentar el pensamiento lógico deductivo.

Además debemos hacer un análisis individual de ellos respecto a las reglas que los definen, si están bien descritas, son fáciles de comprender, qué dificultades han podido surgir antes de comenzar el juego y una vez puesto en práctica cuáles han sido los elementos que se deben mejorar o modificar para agilizar la actividad en partidas posteriores.

También hay que tener en cuenta la duración prevista para cada uno de ellos, y el tiempo de práctica real, si mantienen la atención del alumnado en todo el proceso, cuándo esta disminuye y cuáles son los momentos de mayor concentración.

Respecto a las tres progresiones, si el orden de los juegos que en ellas se expone es el adecuado, si son todos necesarios o hay alguno que se puede suprimir o es demasiado complicado para la edad y no ha cumplido el objetivo de fomentar la investigación y el interés por la materia. Además de plantearnos cuáles de ellos necesitan mayor grado de conocimientos teóricos para su ejecución.

A su vez, hemos de reflexionar sobre los contenidos matemáticos que se precisaban para ejecutar el juego, los que se desarrollaron en su puesta en práctica y los que surgieron que no estaban previstos o planificados y todo esto en relación con los objetivos generales propuestos para la utilización de los juegos y los relativos al último curso de educación primaria.

5.2 Evaluación del alumnado.

En segundo lugar hay que evaluar el papel del alumnado y la adquisición de conocimientos con la puesta en práctica de los juegos. Y se puede hacer desde dos perspectivas, la del propio alumno al que se le pedirá opinión sobre los juegos y las anotaciones que pueda extraer el profesor a través de la observación directa.

A los alumnos se les puede preguntar el grado de interés hacia los juegos, cuál es el más divertido, cuál le resultó más complicado, qué aspectos no comprendió y cuáles fueron demasiado sencillos. Además de hablar sobre la situación de realizar juegos en pareja, si sentía que su compañero sabía más que él, si aprendió y comprendió los conocimientos mejor al jugar en parejas, qué sensaciones le generaba ganar o perder un juego y cuándo descubría la estrategia que pasaba. Contaban lo observado al compañero, intentaban invertir los procesos, etc.

Respecto a la observación, si están predispuestos a pensar antes de actuar o ejecutan los movimientos nada más explicar el juego. Si traman estrategias para la resolución y los momentos de ensayo error. Se esfuerzan por buscar soluciones o se rinden antes de encontrarlas. Si saben explicar cómo realizaron el proceso y lo relacionan con otros juegos o contenidos, etc.

Y en lo relativo a los conocimientos, en qué momento pasa de ser una actividad lúdica a ser un elemento educativo que facilita la comprensión de los contenidos teóricos después expuestos. Cuáles no generaron relación alguna con la materia o no fomentaron el pensamiento matemático. Y cuáles fueron los más demandados, cuáles se tuvieron que repetir, qué relaciones tienen con la vida diaria de los alumnos, si encontraron alguna.

Además se les puede preguntar si prefieren crear los materiales o que estos estén ya diseñados, qué complejidad tiene el diseño de las fichas. Si prefieren manipular los elementos y este hecho les ayuda a obtener con mayor rapidez la estrategia ganadora o si es más fácil realizar los juegos con lápiz y papel ya diseñados por el profesor.

Y las dificultades que hayan podido tener a la hora de trasladar lo ejecutado a anotaciones escritas que requieran algoritmos matemáticos o representaciones en el plano para la búsqueda de nuevas estrategias. Si eran capaces de recordar los pasos seguidos o nunca pensaron en eso, sino que simplemente jugaban, el nivel de esfuerzo y concentración que requerían y si les interesó o si esto no tiene nada que ver con las matemáticas.

5.3 Evaluación del profesor.

Y por último, pero igual de importante que el resto, el papel del profesor a la hora de explicar los juegos y si con ellos se cumplieron los objetivos planteados al inicio del trabajo.

Para ello debe tener clara la definición de juego y el uso que quiere hacer de ellos, cuáles son las razones de su inclusión en el aula, los tipos y la utilización de los mismos. Además de la hora del día en la que los alumnos están más predispuestos para su ejecución, la organización material de la clase y el método de formación de parejas, si será libre u organizada, si debe tener en cuenta el nivel de conocimiento de cada alumno o si son más favorables las parejas heterogéneas. Así como las características individuales de cada uno de sus alumnos, el tiempo que necesitan para comprender los contenidos en la materia y los límites conceptuales.

También debe evaluar su papel ante los juegos, cómo expuso las reglas, si los alumnos las comprendieron, si están bien detalladas, qué sucesión dio mejor resultados, qué problemas surgieron durante la explicación a la hora de mostrar los materiales a los alumnos. Si es mejor que ellos mismos los creen teniendo en cuenta las características y medidas que cada uno de los materiales debe tener, o si es demasiado complicado para la edad.

Y durante la ejecución de los juegos, cuál fue su papel: era demandada su atención por los alumnos, actuó como mediador en algunas situaciones, tuvo que realizar explicaciones complementarias.

Además una vez avanzada la dinámica del uso de juegos en el aula, realizan el mismo juego todos los alumnos a la vez, es flexible en la elección de juegos y permite que cada uno seleccione el que quiere ejecutar siempre que estén dentro del mismo ámbito conceptual que se está trabajando en el aula.

Y sobre todo si se cumplieron los objetivos propuestos, qué grado de conocimiento se obtuvo, si desarrollaron el pensamiento lógico- deductivo de los alumnos, la planificación y la concentración, si sirvieron como elementos clave para agilizar las explicaciones teóricas posteriores y estas se relacionaron con los juegos, si fueron los alumnos los que descubrieron la relación y las estrategias o necesitaban de la ayuda del profesor para llegar a ellas, etc.

5.4 Ejemplo de tabla de evaluación.

La tabla de evaluación que se describe a continuación está relacionada con los objetivos propuestos al comienzo del presente trabajo. Así observamos el grado de cumplimiento de nuestras primeras hipótesis con el resultado de la práctica real, pudiendo modificar aquellos factores que no dieron el resultado esperado.

Juego..... Momento de aplicación.....
 Número de veces expuesto..... Disponibilidad del grupo.....

Ítems de evaluación del juego:

- Duración del juego prevista y real.....
- La descripción de las reglas está bien detallada.....
- Se comprende el objetivo del juego con facilidad.....
- Nivel de complejidad en relación a la edad.....
- Nivel de complejidad en relación a los contenidos requeridos.....
- Genera nuevos conocimientos matemáticos.....
- Facilita la representación de algoritmos matemáticos.....
- Fomenta el aspecto lúdico de las matemáticas.....
- Es adecuado el grado de progresión.....
- Posibles modificaciones a tener en cuenta.....
- Aspectos de éxito y momentos de mayor concentración.....

Ítems de evaluación del alumnado:

- Está motivado ante el juego.....
- Comprende con exactitud las reglas de los juegos.....
- Cumple y pone en práctica las regla del juego.....
- Genera estrategias para resolver el juego.....
- Sabe explicar los procesos que ha seguido.....
- Aplica los conocimientos matemáticos ya adquiridos para su resolución.....
- Flexibiliza las estrategias de resolución del juego.....
- Invierte los procesos de resolución.....
- Experimenta procesos de exploración, planteamiento de hipótesis.....
- Afronta el error y busca nuevas soluciones.....
- En qué momentos pierde interés por el juego.....

- Trabaja en equipo mediante la participación activa.....
- Respeta al compañero.....
- Gestiona las actitudes que genera ganar o perder en un juego.....
- Busca soluciones por interés para el propio aprendizaje.....
- Adquiere seguridad y confianza para el afrontamiento de las matemáticas.....
- Relaciona el juego con elementos esenciales para el día a día.....
- Relaciona el juego con elementos conceptuales y procedimentales.....

Ítems de evaluación del profesor:

- Grado de comodidad a la hora de exponer el juego.....
- Dominio de los elementos y las estrategias ganadoras que requiere el juego.....
- Organización de las parejas.....
- Disposición material del aula.....
- Generó situaciones de aplicación de contenidos matemáticos en vida cotidiana de los alumnos.....
- Motivó futuras investigaciones matemáticas.....
- Observó los límites reforzando aquellos contenidos que aun no se han comprendido en su plenitud.....
- Introdujo progresivamente los contenidos.....

6. A modo de reflexión.

Cualquier fragmento escrito, independientemente de su extensión, comienza con una cuestión, ya sea en forma de hipótesis, pregunta, problema, solución o reflexión. Donde el autor siente la necesidad de (re)construir para sí mismo aquello que le lleva a cuestionarse lo que hasta ahora se planteaba, su configuración del mundo, su acción como persona.

Ese reflexivo reencuentro con nuestro aprendizaje nos lleva a configurar nuestras líneas pedagógicas, nuestro papel como profesores, teniendo en cuenta todos aquellos modelos que influyeron en el proceso y cambiando aquellos aspectos que no consideramos correctos, resaltando nuestro principal elemento, el educando, para llegar a mirar nuestra tarea docente, inserta en el sistema social actual.

Así, las aulas se convierten en ese singular escenario educativo de construcción de identidades, y es esa acción educativa la que pone acento en el entendimiento de las matemáticas como un juego por descubrir, abierto a nuestra imaginación, que nos permite la exploración.

Para que ese descubrimiento real y conceptual, tenga sentido, así como nuestra labor educativa, centrada ante todo en el desarrollo de las capacidades matemáticas de nuestro alumnado, debemos empezar por el principio, por disfrutar con el aprendizaje de las matemáticas y este se propone a partir de la inclusión del juego en el aula.

Como se muestra a lo largo del trabajo, el juego se ha convertido en un elemento pedagógico más, que fomenta el pensamiento lógico deductivo y las futuras producciones del alumnado, guiado por la curiosidad de ese reto que se le propone.

Ésta curiosidad hace que el alumno con el tiempo demande incrementar su aprendizaje, que pueda autoregular su conocimiento. Así, los juegos están planteados en desarrollos contextuales que permiten que nosotros veamos el grado de adquisición de contenidos y que el alumno siempre que lo requiera pueda volver a un juego anterior, si no lo comprendió, si precisaba reforzar, si le interesó demasiado.

Pero para que este intercambio de información sea efectivo requiere que el profesor los estudie, haga progresiones de los elementos que ellos contienen, desde el simple y manipulativo hasta las concepciones conceptuales matemáticas y las posibles teorías que ellas conllevan.

Y esta creo que es la reflexión más importante, la nueva visión hacia la materia que se genera en el profesor, o por lo menos la que en mí generó la construcción de este documento y el análisis de cada uno de los juegos aquí expuesto.

7. Referencias

- Alcalá, M., Aldana, M.J., Alsina, C., Bishop, A. J., Carbó, L., et al. (2004). *Matemáticas re-creativas*. Barcelona: Graó.
- Alsina, C. (1991). Los 90 son nuestros. Ideas didácticas para una matemática feliz. En *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Paris: UNESCO. p.41-52. Recuperado el 10 de mayo de 2014, en: <http://bit.ly/ST9U6S>
- Bishop, A. J. (1998). El papel de los juegos en la educación matemática. *Uno, Revista de Didáctica de las matemáticas*, 18, p. 9-20. Recuperado el 14 de febrero de 2014, en: <http://bit.ly/1snNon9>
- Chamoso, J. M., Durán, J., García, J. F., Martín, J., Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Revista SUMA n° 47*, noviembre, p. 47-58. Recuperado el 04 de febrero de 2014, en: <http://bit.ly/1oEYG4D>
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.
- Corbalán, F. (1996). Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos. *Revista SUMA*, n° 23, noviembre, p. 21-32. Recuperado el 15 de abril de 2014, en: <http://bit.ly/1oEYNgz>
- Corbalán, F., Deulofeu, J. (1998). El juego, las matemáticas y su enseñanza. *Uno, Revista de Didáctica de las matemáticas*, 18, p.5-8. Recuperado el 14 de febrero de 2014, en: <http://bit.ly/1ITyW1o>
- D'Andrea, C. (2012). Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras. *Trabajos de Matemática, Serie "B"*, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, p. 1-18. Recuperado el 10 de marzo de 2014, en: <http://bit.ly/UadVVF>
- Decreto 4/2011, de 28 de enero, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de La Rioja. (BOR, n° 16, de 4 de febrero de 2011).
- Decreto 24/2014, de 13 de junio, por el que se establece el Currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de La Rioja. (Borrador, BOR, n° 74, de 16 de junio de 2014). En: <http://bit.ly/1ikOV8R>
- Deulofeu, J. (2003). Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas: diversidad de opciones y recursos. En *Guías para el profesorado: Matemáticas ESO*. Barcelona: Praxis, p. 115-125.

- Edo, M. (2008). *Juegos y matemáticas en primaria*. Universitat Autònoma de Barcelona *Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals*. Facultat de Ciències de l'Educació.
- Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática*. Madrid: La Muralla.
- Ferrero, L. (2001). El juego matemático en la educación primaria. En Carlavilla, J. L.; Marín, M. (coord.). *La educación matemática en el 2000, Actas del primer congreso regional de Educación Matemática*. Cuenca: Universidad de Castilla La Mancha. p. 89-103.
- Gardner, M. (1983). *Circo matemático*. Madrid: Alianza.
- Guzmán, M. de. (1984). *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Labor. Recuperado el 10 de marzo de 2014, en: <http://bit.ly/T6KNxQ>
- Guzmán, M. de. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton. *Acta de las IV Jornada sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Santa Cruz de Tenerife. p. 1-38. Recuperado el 04 de febrero de 2014, en: <http://bit.ly/1pgGaxr>
- Guzmán, M. de. (1989). Juegos y matemáticas. *Revista SUMA n° 4*, otoño, p. 61-64. Recuperado el 02 de febrero de 2014, en: <http://revistasuma.es/revistas/4-otono-1989/juegos-y-matematicas.html>
- Huizinga, J. (1972). *Homo ludens*. Ensayo sobre la función social del juego. Madrid: Alianza.
- Ley Orgánica de Educación (LOE). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo de 2006. BOE, n° 106, 04/05/2006.
- Ley Orgánica de Mejora de Calidad Educativa (LOMCE). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre de 2013. BOE, n° 295, 10/12/2013.
- Niss, M. (2003). Competencias matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas: el proyecto danés KOM. En A. Gagatsis, y S. Papastavridis (Eds.), *3ª Conferencia Mediterránea sobre Educación Matemática*. Atenas: Hellenic Mathematical Society. p. 116-124.
- OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana Educación. Recuperado el 15 de marzo de 2014, en: <http://bit.ly/1qcwKMr>
- Orden 4/2008, de 4 de marzo, de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte de La Rioja, por la que se regula la evaluación del alumnado que cursa Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de La Rioja. BOR n° 43 de 29/03/2008.

- Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas (traducción de 1974).
- Real Academia Española, (2001). *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid: Espasa Calpe, 22º edición.
- Sánchez, C., Casa, L. M. (1998). *Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en matemáticas*. Madrid: Centro de Publicaciones MEC.
- Stewart, I. (2007). *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática*. Barcelona: RBA.
- Villabrille, B. (2005). El juego y la enseñanza de las matemáticas. SOAREM, Buenos Aires. *Revista premisa*, nº 24, febrero, p.16-22. Recuperado el 15 de marzo de 2014, en: <http://bit.ly/ULpjrz>